Многочлены

Многочлены (полиномы) 2-й и n-й степени

Выберем для будущей работы несколько значений параметров: $a := 2$, $b := 3$, $c := -5$.

II-44 Трёхчлен второй степени. Выражение $y(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, в котором x означает независимую переменную, а $a \neq 0$, b и c — какие-нибудь данные постоянные числа, называется ***квадратичной функцией*** или ***трёхчленом второй степени***.

Различие между таким трёхчленом и левой частью ***квадратного уравнения*** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ состоит в том, что в уравнении буква x означает только те числа, которые удовлетворяют уравнению, тогда как в трёхчлене она означает какое угодно число.

Значения x, обращающие трёхчлен в нуль, называются его ***корнями***; значит, корни трёхчлена — это корни квадратного уравнения: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

I-124 Решение (формула корней) квадратного уравнения. Корень полного квадратного уравнения равен дроби, у которой числитель есть $-b$, плюс-минус корень квадратный из ***детерминанта*** $D := b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, а знаменатель есть удвоенный первый коэффициент $2\ a$:

$$x1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2\ a} = 1$$

$$x2 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2\ a} = -2.5$$

Квадратное уравнение имеет:

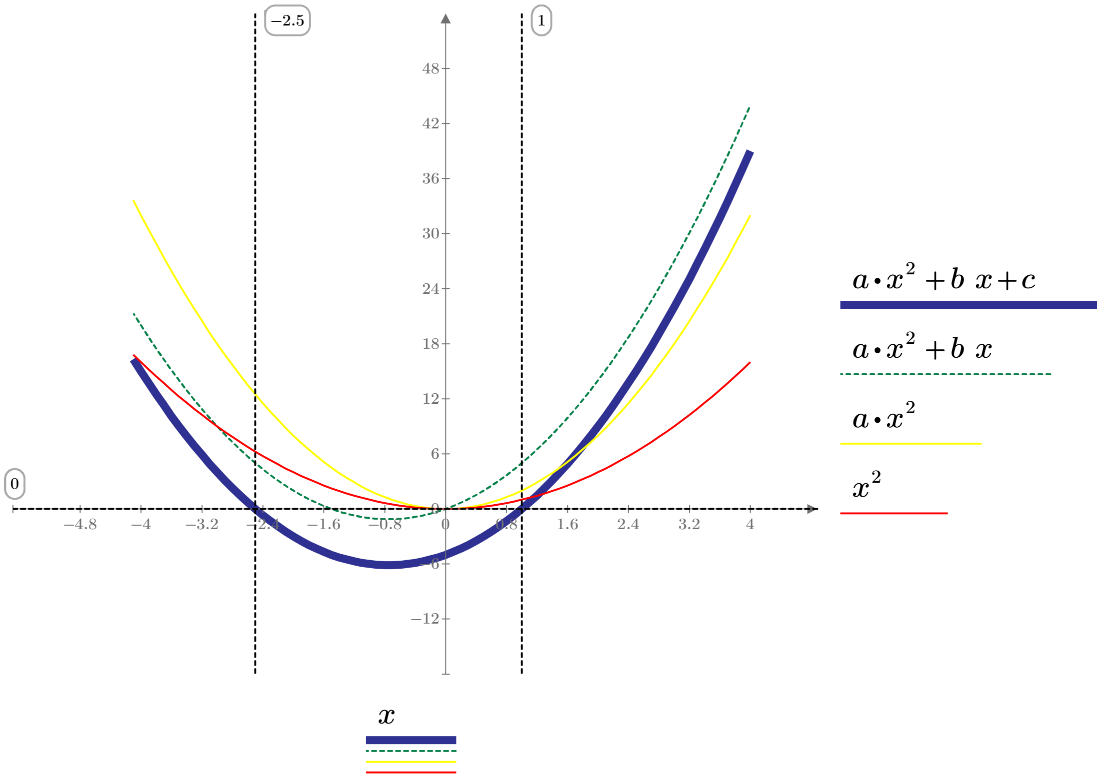
- два корня, когда $D>0$,
- один, когда $D=0$,
- ни одного, когда $D<0$ (случай мнимых корней)

II-45 Разложение трёхчлена второй степени. Трёхчлен, приведенный к виду $x^2 + p \cdot x + q$, разлагается на два множителя, представляющие собой разности между x и корнями трёхчлена $x1$ и $x2$:

$x^2 + p \cdot x + q = (x - x1) \cdot (x - x2)$

II-49 График трёхчлена второй степени. График трехчлена второй степени $y(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ называется ***параболой***. Для сравнения изобразим на том же чертеже ещё три параболы, чтобы прояснить свойства графиков.

$x := -4.1, -4..4$



II-50 Графический способ решения квадратного уравнения. Квадратное уравнение можно графически решить, построив параболу, изображающую трёхчлен, стоящий в левой части уравнения, находим точки пересечения этой параболы с осью х-ов. Абсциссы этих точек и будут корни уравнения, так как при этих абсциссах ординаты, изображающие соответствующие значения трёхчлена, равны нулю. Вертикальные пунктирные линии показывают положение корней $x1$ и $x2$.

После того, как корни приблизительно локализованы (хотя бы по графику), найти их можно численным методом:

$x1 := \mathbf{root}\left(a \cdot x^2 + b\ x + c, x, -5, 0\right) = -2.5$

$x2 := \mathbf{root}\left(a \cdot x^2 + b\ x + c, x, 0, 5\right) = 1$

К-0 Многочлен (полином) n-й степени. Для определенности рассмотрим случай $n := 3$ и определим $n+1=4$ параметра: $A_0 := 20$, $A_1 := 3$, $A_2 := -10$, $A_3 := 1$. Выражение $y(x) := A_3 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_0$, в котором x означает независимую переменную, а A_i — какие-нибудь данные постоянные числа, называется ***многочленом (полиномом) третьей степени***.

Вообще говоря, для любого n ***многочленом (полиномом)*** n***-й степени***

$_n$

называется сумма $y(x) := \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x^i$ (коэффициент A_0 при $x^0 = 1$ называется ***свободным членом***).

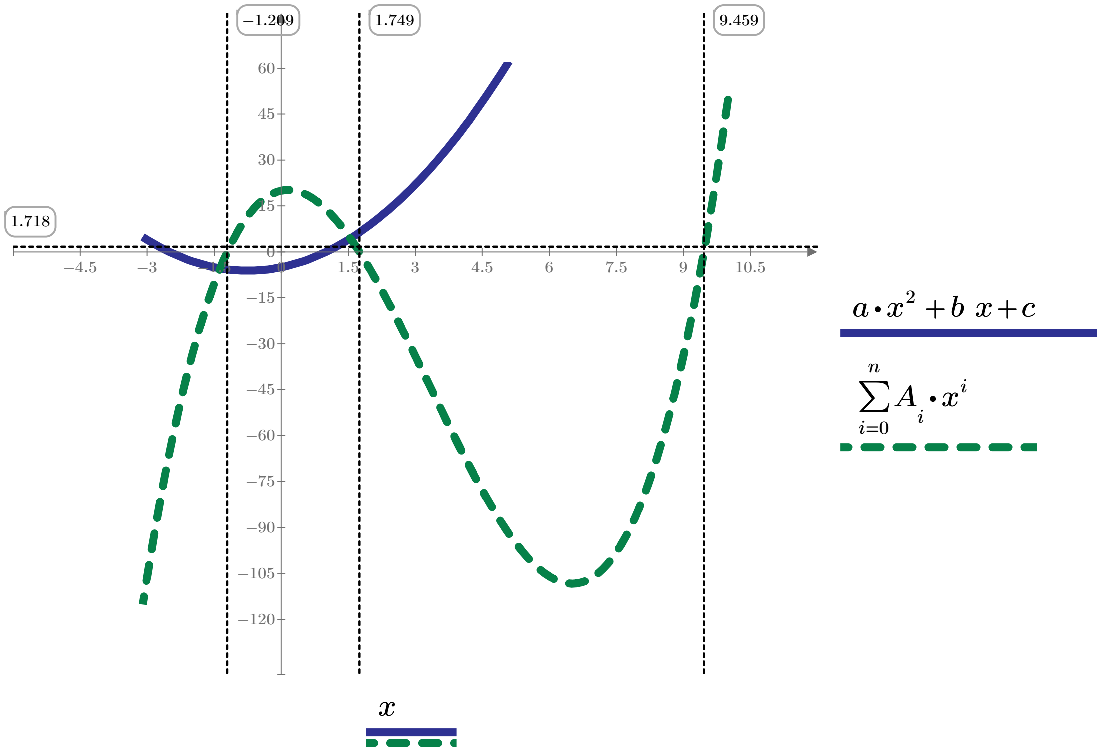
Отыщем все корни кубического уравнения $A_3 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_0 = 0$:

$$x1 := \mathbf{root}\left(A_3 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_0, x, -5, 0\right) = -1.209$$

$$x2 := \mathbf{root}\left(A_3 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_0, x, 0, 5\right) = 1.749$$

$$x3 := \mathbf{root}\left(A_3 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_0, x, 5, 11\right) = 9.459$$

$$x := -3.1, -3 .. 10$$



II-144 Общий вид алгебраического уравнения. Можно показать, что всякое уравнение, в котором неизвестное связано с данными числами посредством конечного числа шести алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня (только если неизвестное не входит ни в показатель степени, ни в показатель корня), может быть приведено к приравниванию нулю многочлена n-й степени:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x^i = 0,$$

где коэффициенты А суть постоянные вещественные или комплексные числа, причем некоторые коэффициенты, кроме первого могут равняться нулю. Уравнение такого вида называется ***алгебраическим***. Алгебраические уравнения степени выше второй называются ***уравнениями высших степеней***.

II-145 Теорема Гаусса: всякое алгебраическое уравнение имеет вещественный или комплексный корень. Допустив эту истину (доказательство которой в элементарной алгебре было бы затруднительно), нетрудно показать, алгебраическое уравнение имеет число корней, вещественных или комплексных, равное n, т.е. стапени определяющего уранвнеие полинома.

.